

Független metszőrendszerek II.

RÓKA SÁNDOR

Abstract. (Independent intersection systems) Definition 1 gives the meaning of independent intersection systems, which is similar of the meaning of separating systems (theorem 5), which is discussed by others (see for e.g. [2-8]).

If the number of the elements of the intersection systems on the n -element set is m , then $c_1 \log_2 n \leq m \leq c_2 n^2$. These bounds can not be sharpened. Theorems 3 and 4 are related to uniform systems.

1. Definíció. A_1, A_2, \dots, A_m az n -elemű H halmaz részhalmazai független metszőrendszert alkotnak, ha

- (1) $\forall x \in H$ előáll A_i metszeteként;
- (2) Az A_1, A_2, \dots, A_m rendszerből bármely A_i -t elhagyva (1) nem teljesül.

1. Tétel. A_1, A_2, \dots, A_m pontosan akkor független metszőrendszer, ha $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_m}$ is független metszőrendszer.

Bizonyítás. Legyen $H = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $X_i = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Tegyük fel, hogy A_1, A_2, \dots, A_m független metszőrendszer. Megmutatjuk, hogy például X_1 előállítható az $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_m}$ halmazokból néhánynak a metszeteként.

$$\begin{aligned} X_1 &= H \setminus \{X_2 \cup X_3 \cup \dots \cup X_n\} = \overline{X_2 \cup X_3 \cup \dots \cup X_n} = \\ &= \overline{X_2} \cap \overline{X_3} \cap \dots \cap \overline{X_n} = \overline{\left(\bigcap_{i \in I_2} A_i\right)} \cap \overline{\left(\bigcap_{i \in I_3} A_i\right)} \cap \dots \cap \overline{\left(\bigcap_{i \in I_n} A_i\right)} = \\ &= \left(\bigcup_{i \in I_2} \overline{A_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i \in I_3} \overline{A_i}\right) \cap \dots \cap \left(\bigcup_{i \in I_n} \overline{A_i}\right) = \cup(\overline{A_{i_2}} \cap \overline{A_{i_3}} \cap \dots \cap \overline{A_{i_n}}) \end{aligned}$$

Mivel X_1 egyetlen elemből álló halmazt jelentett, így az unió tagjainak valamelyike egyenlő X_1 -gyel.

Látható, hogy az A_1, A_2, \dots, A_m és az $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_m}$ rendszerek egyszerre rendelkeznek az (1) tulajdonsággal, és ebből adódóan a (2) tulajdonsággal is. ■

Következmény. Az A_1, A_2, \dots, A_m független metszőrendszeren nem oldható meg az

$$(3) \quad A_I = \bigcap_{i \in I} A_i \quad I \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \quad |I| \neq 1$$

egyenlet.

Bizonyítás. A definícióból következik, hogy $A_I = \bigcup_{i \in I} A_i$, továbbá $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ és az $|I| \neq 1$ egyenlet nem oldható meg, s így az előbbi tétel miatt nem oldható meg a (3) egyenlet sem. ■

2. Tétel. Az A_1, A_2, \dots, A_m az n -elemű H halmazon független metszőrendszer, akkor $c_1 \log_2 n \leq m \leq c_2 n^2$, és ezek a korlátok nagyságrendjükben pontosak.

Bizonyítás. Legyen $X_k = \bigcup_{i \in I_k} A_i$, $|X_k| = 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Az $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ rendszer Sperner-rendszer, így a Sperner-lemma [1] miatt $n \leq \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$, azaz $m \geq c_1 \log_2 n$. Megmutatjuk, hogy az alsó korlát pontos, vagyis, ha $\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \leq n$, akkor van egy legfeljebb m halmazból álló A_1, A_2, \dots, A_m független metszőrendszer az n elemű H halmazon.

Tekintsük azt az A $m \times \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ -es 0-1 mátrixot, amelynek oszlopai az $\{1, 2, \dots, m\}$ halmaz egy-egy $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ -elemű részét reprezentálják. Az A mátrix soraival megadott m db halmazból néhányat választva az $\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ elemű halmaz bármely elemét kimetszhetjük.

A felső korlát igazolása. Legyen $x \in H$, s tekintsük azon A_i -ket, melyek szükségesek az (1) és (2) szerinti előállításához. A_i -kből hagyjuk el az x elemet. Az így kapott halmazokat jelölje A'_i . Ezen A'_i -k száma s . Most bármely $s - 1$ db A'_i metszete $\neq \emptyset$, míg az összes A'_i metszete $= \emptyset$. Így minden A'_i -hez hozzárendelhetünk egy olyan elemet a $H \setminus \{x\}$ halmazból, mely a többi A'_j -nek nem eleme. Ezért $s \leq n - 1$. Így leszámolva az A_1, A_2, \dots, A_m halmazokat, azt kapjuk, hogy $m \leq n(n - 1)$.

Megadunk olyan független metszőrendszert a $H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ halmazon, mely $c_2 n^2$ halmazból áll. Legyen $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $R = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, $A_i = R \setminus \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, r$; $A_{i,j} = \{x_i\} \cup A_j$, $i = r + 1, r + 2, \dots, n$ $j = 1, 2, \dots, r$.

Az $A_{i,j}$ halmazok független metszőrendszert alkotnak, s a halmazok száma több, mint $\frac{1}{4}n^2 - 1$. ■

Vizsgáljuk most azon független metszőrendszereket, melyek uniform rendszerek.

Legyen A_1, A_2, \dots, A_m az n -elemű H halmazon független metszőrendszer, és $|A_i| = k$, $i = 1, 2, \dots, m$. Jelölje m értékének legkisebb értékét $f_k(n)$, legnagyobb értékét $F_k(n)$.

Az 1. Tétel miatt $f_k(n) = f_{n-k}(n)$ és $F_k(n) = F_{n-k}(n)$. Ezért $f_k(n)$ értékét elegendő $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ esetekben meghatározni.

3. Tétel.

(a) $f_k(n) \leq \frac{2n}{k}$, $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

(b) Ha $k \leq \sqrt{2n}$, $k \mid 2n$ és k páros, akkor $f_k(n) = \frac{2n}{k}$.

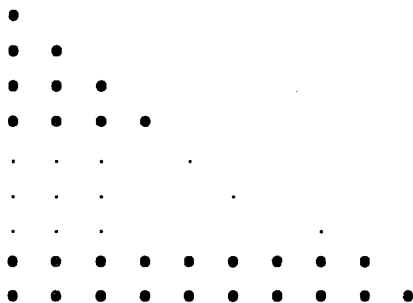
(c) $f_k\left(\frac{k(k+1)}{2}\right) = k+1$, azaz ha $n = \frac{k(k+1)}{2}$, akkor $f_k(n) = \frac{2n}{k}$.

Bizonyítás. Legyen A_1, A_2, \dots, A_m a $H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ halmazon független metszőrendszer, $|A_i| = k$, $i = 1, 2, \dots, m$, és $B_i = \{k : x_i \in A_k\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ekkor $|B_i| \leq 2$.

Mivel $mk = \sum_{i=1}^m |A_i| = \sum_{j=1}^n |B_j| \leq 2n$, így $m \leq \frac{2n}{k}$.

Belátjuk, ha $k \leq \sqrt{2n}$, $k \mid 2n$ és k páros, akkor $f_k(n) \leq \frac{2n}{k}$. Innen (a) felhasználásával adódik a (b) állítás.

Készítsünk egy gráfot. Legyen a G gráf csúcsainak száma $m = \frac{2n}{k}$, és számozzuk meg a gráf csúcsait az $1, 2, \dots, m$ számokkal. A gráf minden csúcsára k él illeszkedjen. Ekkor a gráfnak n éle van. Ilyen gráf az Erdős—Gallai-tétel [9] szerint készíthető. Álljon most az n elemű H halmaz a gráf éleiből, az A_1, A_2, \dots, A_m halmazokat pedig a következő módon kapjuk: A_i a gráf azon éleiből áll, amelyek illeszkednek a gráf i -edik csúcsára.



Legyen most $n = \binom{k+1}{2}$. A H halmaz az ábrán látható pontokból áll, az A_1, A_2, \dots, A_{k+1} halmazokat pedig a háromszög átlóján levő pontok határozzák meg, egy-egy ilyen ponttal közös halmazba tartoznak a vele egy sorban és a vele egy oszlopban levő pontok, valamint egy további halmaz van még, mely az átlón levő pontokból áll. Ezen konstrukció miatt $f_k(n) \leq k+1$, ám (a) miatt $f_k(n) \geq k+1$, ezzel igazoltuk (c)-t is. ■

4. Tétel. $k(n - k) \leq F_k(n) \leq kn$, $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

Bizonyítás. Legyen

$$H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad R = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}, \quad A_i = R \setminus \{x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, k;$$

$$A_{i,j} = \{x_i\} \cup A_j, \quad i = k+1, k+2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Az $A_{i,j}$ halmazok független metszőrendszer alkotnak, a halmazok száma $k(n - k)$, és $|A_{i,j}| = k$ így valóban $F_k(n) \geq k(n - k)$.

A felső korlát igazolása. Legyen A_1, A_2, \dots, A_m az n -elemű H halmazon független metszőrendszer, $|A_i| = k$, $i = 1, 2, \dots, m$. Legyen $x \in H$, s tekintsük azon A_i -ket, melyek szükségesek az (1) és (2) szerinti előállításához. A_i -kből hagyjuk el az x elemet. Az így kapott halmazokat jelölje A'_i . Ezen A'_i -k száma s . Most bármely $s - 1$ db A'_i metszete $\neq \emptyset$, míg az összes A'_i metszete $= \emptyset$. Így minden A'_i -hez megadható olyan elem, mely neki nem eleme, de a többi A'_j -nek igen. Rögzített A'_j mellett sorra véve a többi A'_i -t, A'_j -nek $s - 1$ különböző eleme jelölhető így ki, azaz $s - 1 \leq |A'_j| = k - 1$. Tehát H egy tetszőlegesen kiválasztott x eleméhez legfeljebb k db A'_i rendelhető, így $m \leq nk$. ■

Már eddig is több független metszőrendszerre láttunk példát, most még további két rendszert konstruálunk.

1. konstrukció. Tekintsük egy N pontú teljes gráfot, s minden élére helyezzünk újabb pontot. A H halmaz ezen „régí” és „új” pontokból áll, tehát $|H| = N + \binom{N}{2}$. A metszőrendszer a „fél-élekből” áll, tehát olyan kételemű halmazokból, melyek egyik eleme egy „régí” és egy „új” pont, és közös az az él a teljes gráfban, melyre ez a két pont illeszkedik. A metszőrendszer elemeinek m száma itt nagyságában $2|H|$ -hoz közelít.

2. konstrukció. Vegyünk egy N elemű X halmazt, ennek elemeit nevezzük „régí” pontoknak, az „új” pontok az N elemű halmaz $\left[\frac{N}{2}\right]$ -elemű részei. Így elkészítettük a H halmazt, mely ezen „régí” és „új” pontokból áll, tehát $|H| = N + \binom{m}{2}$. A metszőrendszer egy-egy halmaza egy „új” pontból és a hozzá tartozó $\left[\frac{N}{2}\right]$ „régí” pontból $\left[\frac{N}{2}\right] - 1$ választva — ezt az összes lehetséges módon megtesszük — áll. Itt $m = \left[\frac{N}{2}\right] \left(\left[\frac{N}{2}\right]\right)$, vagyis m nagyságában $|H| \log |H|$ -hoz közelít.

A dolgozatban megadott független metszőrendszerek mindegyike Sperner-rendszer volt. Ez azonban nem szükségszerű, mint az alábbi példa mutatja.

A következő konstrukció mutatja, hogy egy független metszőrendszer nem feltétlenül *Sperner-rendszer*. (A táblázat sorai jelölik ki egy 6-elemű halmaz részhalmazait.)

•	•				
•	•	•			
	•	•	•		
		•	•	•	
•			•		
				•	•
•					•

Az pedig nyilvánvaló, hogy egy *Sperner-rendszer* többnyire nem lesz független metszőrendszer, még akkor sem, ha telített (egy *Sperner-rendszert* akkor nevezünk telítettnek, ha a rendszer nem bővíthető további halmazzal úgy, hogy a *Sperner*-tulajdonsága megmaradjon). Erre mutat példát a második ábra.

•	•	•	•	
•	•		•	•
		•		•

Várhatnánk, hogy ha S és S^* is *Sperner-rendszer*, akkor S független metszőrendszer. ($A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $A_i \subseteq H$, ahol $H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Ekkor $A^* = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, ahol $B_i = \{k : x_i \in A_k\}$. Látható, hogy $(A^*)^* = A$.)

•	•		
	•	•	
		•	•
•			•
•	•	•	

2. Definíció. A_1, A_2, \dots, A_m az n -elemű H halmaz részhalmazai független t -metszőrendszer alkotnak, ha

- (1') H bármely t -elemű része előáll néhány A_i metszeteként;
- (2') Az A_1, A_2, \dots, A_m rendszerből bármely A_i -t elhagyva (1') nem teljesül.

A független metszőrendszer fogalma kapcsolódik egy régen ismert fogalomhoz, a kölcsönösen szeparáló rendszerekéhez. Legyen H egy n elemű halmaz, A_1, A_2, \dots, A_m ennek részhalmazai. Ez utóbbi rendszer szeparáló rendszer, ha H bármely x, y elemeihez van olyan A_i , hogy vagy $x \in A_i$ és $y \notin A_i$, vagy $x \in A_i$ és $y \in A_i$. Ezt a fogalmat Rényi [2] vezette be, és Katona [3] megmutatta, hogy $m \geq \lceil \log_2 n \rceil$. Dickson a szeparáló rendszer definícióját módosította. Az A_1, A_2, \dots, A_m rendszert kölcsönösen szeparáló rendszernek nevezi, ha H bármely x, y elemeihez van olyan A_i és A_j , hogy $x \in A_i$ és $y \notin A_i$, továbbá $x \notin A_j$ és $y \in A_j$. Dickson [4], majd Spencer [5] megmutatja, hogy erre a rendszerre is $m \geq \log_2 n$. Katona fogalmazta meg a teljes szeparáló rendszer fogalmát. Az A_1, A_2, \dots, A_m rendszert akkor tekintjük ilyennek, ha H bármely x, y elemeihez van olyan A_i és A_j , hogy $x \in A_i$ és $y \in A_j$, és $A_i \cap A_j = \emptyset$. Erre a rendszerre az előbbiekhöz hasonló becslést ad Yao [7] és tőle függetlenül Cai Mao-cheng [8].

Látható, hogy egy teljesen független rendszer egyúttal kölcsönösen szeparáló, és egy kölcsönösen szeparáló pedig szeparáló.

5. Tétel. *A független metszőrendszer (1) feltétele azonos a kölcsönös szeparáló rendszer definíciójával.*

Bizonyítás. Ha egy halmazrendszerre teljesül az (1) feltétel, akkor az kölcsönösen szeparáló. Ugyanis vegyük H két x, y elemét. Ekkor x is y is előáll néhány A_i metszeteként. Ezért van olyan A_i melynek x eleme, de y nem, és van olyan A_j melynek y eleme, de x nem. Ha egy halmazrendszer kölcsönösen szeparáló, akkor kielégíti az (1) feltételt, hiszen már az a kikötés, hogy H bármely x, y eleméhez van olyan A_i , hogy $x \in A_i$ és $y \notin A_j$, garantálja azt, hogy x előállítható néhány A_i metszeteként. ■

Ezt a tételt figyelembe véve nevezzük az n -elemű H halmaz A_1, A_2, \dots, A_m részhalmazait t -szeparálónak, ha kielégíti az (1') feltételt.

Látható, hogy egy t -szeparáló rendszer egyúttal t' -szeparáló is, ahol $t > t' \geq 1$.

Az is könnyen ellenőrizhető, ha a H halmaznak A_1, A_2, \dots, A_m 1-szeparáló rendszere, akkor az $\bigcup_{i \in I} A_i$, $i \subset \{1, 2, \dots, m\}$, $|I| = t$ halmazokból álló rendszer t -szeparáló.

Ha az n elemű H halmazon A_1, A_2, \dots, A_m t -szeparáló rendszert alkot, akkor $\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \geq \binom{n}{t}$. Ez ugyanúgy bizonyítható, mint ahogy a hasonló állítást igazoltuk a 2. Tétel esetén.

Hálával tartozom Katona Gyulának a tőle kapott segítségért és biztatásért, melyet ezúton szeretnék megköszönni.

Irodalom

- [1] E. SPERNER, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Z.* **27** (1928), 544–548.
- [2] A. RÉNYI, On Random Generating Elements of a Finite Boolean Algebra, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **22** (1961), 75–81.
- [3] G. KATONA, On Separating Systems of a Finite Set, *J. Combinatorial Theory* **1** (1966), 174–194.
- [4] T. J. DICKSON, On a problem concerning Separating Systems of a Finite Set, *J. Combinatorial Theory* **7** (1966), 191–196.
- [5] J. SPENCER, Minimal completely Separating Systems, *J. Combinatorial Theory* **8** (1970), 446–447.
- [6] G. O. H. KATONA, Combinatorial search problem, A Survey of Combinatorial Theory, North-Holland, Amsterdam, 1973, pp. 285–308.
- [7] A. C.-C. YAO, On a Problem of Katona on Minimal Separating Systems, *Discrete Math.* **15** (1976), 193–199.
- [8] CAI MAO-CHENG, Solutions to Edmonds' and Katona's problems on families of separating subsets, *Discrete Math.* **47** (1983), 13–21.
- [9] ERDŐS—GALLAI, Gráfok előírt fokú pontokkal, *Matematikai Lapok* **11** (1960), 264–274.
- [10] RÓKA SÁNDOR, Független metszőrendszerek, *Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis* **12** (1990), 17–20.

Az eredmények egy része a [10] dolgozatban megtalálható, itt a teljesség kedvéért ismételtük meg az ott leírtakat. Az új eredmények: a 2. Tétel bizonyításában az utolsó konstrukció, a 3–4. Tétel, valamint a független metszőrendszer és a Sperner-rendszerek közti kapcsolat vizsgálata.

BESSENYEI COLLEGE

DEPT. OF MATH.

NYÍREGYHÁZA, P. O. Box 166., H-4400,
HUNGARY

